30/5/2018

Άσκηση Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $0 \neq 1$. Δείξτε ότι το R είναι σώμα, αν και μόνο αν, έχει ακριβώς δύο ιδεώδη.

Λύση: ($\Longrightarrow$) Έστω R σώμα και I ιδεώδες, τέτοιο ώστε: $I \neq \langle 0 \rangle = \{0_R\}$.

- $I \neq \langle 0 \rangle \Rightarrow (\exists\ \alpha \neq 0)$, τ/ω $\boxed{\alpha \in I}$.
- $\alpha \in I \subseteq R \Longrightarrow (\exists\ b \in R)$, τ/ω: $\boxed{b \cdot \alpha = 1_R}$ και $\boxed{1_R \in I}$
- Για $r \in R$, έχουμε: $r = \underset{\in R}{r} \cdot \underset{\in I}{1_R} \in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow r \in R \Rightarrow r \in I \Rightarrow \boxed{R \subseteq I}$$

- Καθώς $\boxed{I \subseteq R}$, έπεται ότι: $\boxed{I = R}$

Συνεπώς το R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη, το

$$\{0_R\} \text{ και το } R$$

($\Longleftarrow$) Το R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη, το $\{0_R\}$ και το R

- Έστω $\alpha \in R$, με $\alpha \neq 0$. Τότε, το

$$I = \langle \alpha \rangle = \{r \cdot \alpha \mid r \in R\}$$

είναι ιδεώδες $\neq \{0_R\}$ (αφού $\alpha \in I$, με $\alpha \neq 0$).

. Όμως το R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη, το $\{0_R\}$ και το R. Άρα $\boxed{I = \langle\alpha\rangle = R}$.

. $1_R \in R = I = \langle\alpha\rangle \Rightarrow 1 = r_1 \cdot \alpha = \alpha \cdot r_1$

$\Rightarrow \boxed{\alpha : \text{αντιστρέψιμο}} \Rightarrow \boxed{R \cdot \text{σώμα}}$

(⚠ Αν κάθε δακτύλιος $R_1, \dots, R_n$ έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε, το $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ έχει μοναδιαίο στοιχείο, το $(1_{R_1}, 1_{R_2}, \dots, 1_{R_n})$. Αν έστω και ένας δακτύλιος δεν είναι μοναδιαίος, τότε δεν είναι και το ευθύ γινόμενο $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$.)

▸ Δακτύλιοι Πολυωνύμων

▸ Έστω R τυχαίος δακτύλιος.

. Πολυώνυμο με συντελεστές από το R είναι ένα τυπικό άθροισμα της μορφής: $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \dots)$ όπου πεπερασμένο πλήθος συντελεστών α_i είναι διάφορο του μηδενός!!

▶ $\mathbb{R}[x]$: το σύνολο όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{R}$, όπου:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\nu x^\nu + \dots \\ g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_\nu x^\nu + \dots \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = (\alpha_0 + b_0) + (\alpha_1 + b_1)x + \dots + (\alpha_\nu + b_\nu)x^\nu + \dots$$

<u>και</u>:

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_\nu x^\nu + \dots ,$$

με:

$$c_\nu = \alpha_0 \cdot b_\nu + \alpha_1 \cdot b_{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu \cdot b_0 = \boxed{\sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \cdot b_{\nu-i}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbb{R}[x] : \text{δακτύλιος}}$$

▶ **Παράδειγμα**: $\mathbb{R}[x] \longrightarrow I = \langle x^2+1 \rangle = \{ r(x) \cdot (x^2+1) \mid r(x) \in \mathbb{R}[x] \}$

Σώμα των πραγματικών αριθμών

▶ **Άσκηση** Δείξτε ότι $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle \cong \mathbb{C}$.

▶ **Λύση:** Θεωρώ $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, τ/ω:

$$\varphi(f(x)) = \varphi(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots) = a_0 + a_1 i + \dots + a_n i^n$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(f(x)) = f(i)}$$

• $\varphi(f(x) + g(x)) = f(i) + g(i) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$

και $\varphi(f(x) \cdot g(x)) = f(i) \cdot g(i) = \varphi(f(x)) \cdot \varphi(g(x))$

$\Rightarrow \varphi$: ομομορφισμός δακτυλίων

• φ: επί εκ-κατασκευής, καθώς:

$$\underbrace{\varphi(a+bx)}_{\in \mathbb{R}[x]} = a + bi \in \mathbb{C}$$

• Έστω $g(x) \in \langle x^2+1 \rangle \Rightarrow \boxed{g(x) = f(x)(x^2+1)}$

$$\Rightarrow \varphi(g(x)) = g(i) = f(i)\underbrace{(i^2+1)}_{=0} \Rightarrow \varphi(g(x)) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \in \ker\varphi \Rightarrow \boxed{\langle x^2+1 \rangle \subseteq \ker\varphi}$$

• Έστω $g(x) \in \ker\varphi$, όπου $g(x) = g_1(x)(x^2+1) + u(x)$

, με $\deg(u(x)) < 2$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = g_1(x)(x^2+1) + (a+bx)} \Rightarrow$$

$\Longrightarrow g(x) \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(g(x)) = 0 \Rightarrow g(i) = 0$

$\Rightarrow \cancel{q(i)(i^2+1)}^{\,0} + (\alpha + bi) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 0}\ \&\ \underline{b = 0}$

$\Rightarrow \boxed{u(x) = 0} \Rightarrow \underline{g(x) = q(x)\cdot(x^2+1) \in \langle x^2+1\rangle}$

$\Rightarrow \boxed{\langle x^2+1\rangle \supseteq \ker\varphi}$

- **Συνεπώς**: $\boxed{\langle x^2+1\rangle = \ker\varphi}$
- Από το $\underline{1^o}$ θεώρημα ισομορφισμών:

$\mathbb{R}[x] / \langle x^2+1\rangle \cong \varphi(\mathbb{R}[x]) \Rightarrow$

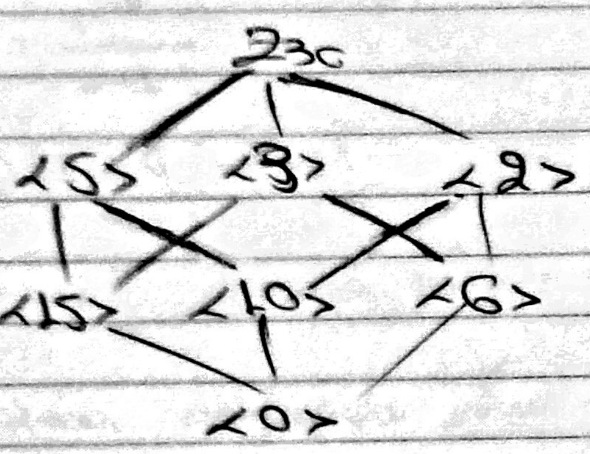
$\Rightarrow \boxed{\mathbb{R}[x] / \langle x^2+1\rangle \cong \mathbb{C}}$

- Καθώς $\mathbb{C}$: σώμα $\Rightarrow$ I: μεγιστοτικό.

▶ Άσκηση Να βρεθούν οι υποομάδες, το πλέγμα γεννητόρων και να σχεδιαστεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της $\mathbb{Z}_{30}$

▸ **Λύση**: Έστω $H \trianglelefteq \mathbb{Z}_{30} \Rightarrow |H| \in \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

$\Rightarrow H=\langle 0\rangle$, $H=\langle 15\rangle$, $H=\langle 10\rangle$, $H=\langle 6\rangle$, $H=\langle 5\rangle$, $H=\langle 3\rangle$, $H=\langle 2\rangle$, $H=\langle 1\rangle=\mathbb{Z}_{30}$



Διάγραμμα Hasse

▸ **Άσκηση**: Βρείτε όλα τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_{12}$

▸ **Λύση**: Υποομάδες του $\mathbb{Z}_{12}$: $\{\langle 0\rangle, \langle 6\rangle, \langle 4\rangle, \langle 3\rangle, \langle 2\rangle, \langle 1\rangle\}$

• Όλα είναι ιδεώδη, καθώς:

Π.χ.: $\langle 2\rangle \Rightarrow [2k]_{12}\cdot[a]_{12} = [2]_{12}\cdot[ak]_{12} \in \langle [2]_{12}\rangle$

• Παρατηρώ: $\boxed{\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle \simeq \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle \simeq \mathbb{Z}_4}$

Άσκηση Βρείτε την χαρακτηριστική των:

$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_4[x]$

$\downarrow$ 4, $\downarrow$ 5, $\downarrow$ 4, $\downarrow$ 0, $\downarrow$ 4